Endogène égale exogène en 2 commandes… et plus !

François Ollivier (CNRS)

Brahim Sadik

(Faculté des Sciences Semlalia, Marrakech)

Contexte

Critère effectifs de platitude

Un *système paramétrable* est un système différentiel ordinaire dont la solution générale peut être paramétrée sur un ouvert par m fonctions arbitraires. Il est *plat* si ce paramétrage est localement bijectif. Fliess, Lévine, Martin et Rouchon (1991)

Conjecture « endogène égale exogène » : tout système paramétrable est plat.

Les premiers exemples de systèmes plats ont été donnés par Monge (1784). Le *problème de Monge* est précisément de tester si un système est plat. Serret, Goursat, Hilbert, Cartan, Pangiotis Zervos (1878-1952).

Le nombre de commandes est la *dimension différentielle* en algèbre différentielle (Ritt) ou en théorie des diffiétés (Vinogradov).

Exemple de la voiture.

$$\cos(\theta)y' - \sin(\theta)x' = 0$$

Sorties linéarisantes :

— x et y avec $\theta = \arctan(y'/x')$ ou $\theta = \operatorname{arccot}(x'/y')$;

— θ et $z := \cos(\theta)y - \sin(\theta)x$ avec
$x = -\sin(\theta)z - \cos(\theta)z'/\theta'$ et $y = \cos(\theta)z - \sin(\theta)z'/\theta'$.

La roue de Monge – Petitot

$$(x')^2 + (y')^2 = (z')^2.$$

Les sorties plates sont les points d'une développante de la courbe (x, y) :

$$\zeta_1 = x - \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} z; \quad \zeta_2 = y - \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} z.$$

Il s'agit du système tachyconique obtenu à partir du système non plat de Hilbert (1912) en « contôlant le temps ».

$$x' = u; \quad y' = u^2.$$

$$x' = vu; \quad y' = vu^2; \quad t' = v; \quad \text{donc : } y't' = (x')^2.$$

$$(A' + B')(A' - B') = (x')^2 : \quad (x')^2 + (B')^2 = (A')^2.$$

Platitude orbitale : les fonctions solutions *et* le temps sont fonctions de $m+1$ fonctions arbitraires. C'est la notion implicitement considérée par Monge qui ne distingue pas fonctions dépendantes et indépendantes.

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}z^2.$$

Les critères de Cartan (1914–1915)

Premier critère. — Soit $x_i' = f_i(x, u, t)$ un système à une commande. On note $\mathrm{d}_t := \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ la dérivation (champs de Cartan) et ∂_u $\partial/\partial u$. Le système est plat si les distributions définies par $D_0 = \langle \partial_u \rangle$ et $D_{i+1} = \langle D_i, [\mathrm{d}_t, D_i] \rangle$ sont involutives (stables par crochet) et telles que $\dim D_i = i + 1$ pour $0 \leq i \leq n - 1$.

Ce théorème est aussi un critère de « paramétrabilité », donc endogène égale exogène en une commande. Charlet, Lévine et Marino (1989).

Second critère. — Soit $x_i' = f_i(x)u + g_i(x)v$ un système (sans dérive) à 2 commandes. On note $f = \sum_{i=1}^n f_i\partial_{x_i}$ et $g = \sum_{i=1}^n g_i\partial_{x_i}$. Le système est plat si les distributions définies par $D_0 = \langle f, g\rangle$ et $D_{i+1} = \langle D_i, [D_i, D_i]\rangle$ sont telles que $\dim D_i = i+2$ pour $0 \leq i \leq n-2$.

Il s'agit en fait de la version « orbitale » du théorème précédent.

Un peu de formalisme

Algèbre différentielle. Ritt (1893–1951)

Anneau différentiel : anneau avec une dérivation. Corps.

Polynôme : $\mathcal{F}\{x_1, x_n\} = \mathcal{F}[x_1, x_1', \ldots, x_n, x_n', \ldots]$ muni de l'unique dérivation compatible avec celle de $\mathcal{F}$ et $(x_i^{(k)})' = x_i^{(k+1)}$.

Idéal différentiel I : stable par dérivation. $P \in I$ implique $P' \in I$.

Un idéal différentiel premier I de $\mathcal{F}\{x\}$ définit l'anneau différentiel intègre $A := \mathcal{F}\{x\}/I$ et l'extension de corps $\mathcal{G}/\mathcal{F}$, où $\mathcal{G}$ est le corps de fraction de A.

Définition. — Une extension de corps $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ est plate si $\overline{\mathcal{G}}$ est isomorphe à $\overline{\mathcal{F}\langle z_1, \ldots, z_m\rangle}$.

Les z_i sont appelés les *sorties linéarisantes* ou *sorties plates.*

Théorie des diffiété. Vinogradov (1938 –)

Définition. Une diffiété est une variété de dimension dénombrable équippée d'un champs de vecteur.

Les fonctions sur la diffiété sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ *ne dépendant que d'un nombre fini de paramètres.*

La topologie est la topologie la plus grossière qui rende les projections sur les espace de dimension fini continues.

Exemple. Espace des jets : $\mathrm{J}^n := J(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$. Fonctions de coordonnées : x_i, x_i', ...et t ; $\mathbf{R} \times \left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right)^n$ muni de la dérivation

$$\partial_t + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k_{in\mathbf{N}}} x^{(k+1)} \partial_{x_i^{(k)}}.$$

On peut recoller des cartes.

Un outil fondamental : le critère de Rouchon

Si un système $P_i(x', x, t) = 0$ est paramétrable, alors en tout point x de l'état, les dérivées x' appartiennent à une variété réglée.

Idée de la preuve : $x_i = X_i(z, z', \ldots, z^{(r)})$. Alors

$$x_{i'} = \sum_{i=1}^{m} z_i^{(r+1)} \partial_{z_i^{(r)}} X_i + \cdots$$

avec $\partial_{z_i^{(r+1)}} \partial_{z_i^{(r)}} X_i = 0$.

En notant $D = \sum_{i=1}^{n} C_i \partial_{x'_i}$ avec $DC_i = 0$, l'idéal $(D^j P_i | j \in \mathbf{N},\ 1 \leq i \leq n)$ est homogène en les C_i et admet une solution non triviale, correspondant à une famille de droites.
Si le nombre de familles de droites est fini, il est borné par m.

Comment obtenir une version effective d'endogène égale exogène en deux commandes ?

Idée de la preuve

On suppose avoir choisi un système de coordonnées x_i en nombre n minimal, satisfaisant un système d'ordre 1 et tel que l'ordre r du paramétrage soit minimal.

Si $n = 2$, le système est plat.

Le cas linéaire

Si le système est linéaire, $x_{i'} = f_i(x)x_1' + g(x_2', x)$, alors on peut faire décroître n en remplaçant les x_i par $n-1$ solutions indépendantes y_i de

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\partial_{x_i} Y = 0.$$

Si la diffiété définie par les y_i est de dimension différentielle, 1 elle est plate avec une sortie linéarisante z ; alors x_1 et z sont des sorties linéarisantes pour la diffiété globale.

Sinon, les y_i vérifient un système d'ordre 1 : $y_i' = g_i(x_1, x_2', y)$, contredisant la minimalité de n

Le cas non-linéaire

Si le système est non linéaire en les dérivées, alors il y a au plus 2 familles de droites, dont l'une correspond à un facteur près à $\partial_{z_i^{(r)}}$. On peut réécrire le système sous la forme

$$x_i' = f_i(x, w)x_1' + g_i(x, w).$$

On a envie de prendre de nouvelles coordonnées y_i qui soient $n-1$ solutions indépendantes de

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x, w)\partial_{x_i} Y = 0.$$

Problème : les y_i dépendent de w, qui doit être adjoint aux fonctions y_i, donc la dimension d'état reste n. Peut-on faire chuter l'ordre ? Pour cela, il faut que w soit d'ordre $r-1$. Un tel choix est-il possible ?

Pour traiter le cas en 2 commandes, commençons par le cas général.

On va donner une preuve (non effective) d'endogène égale exogène, en se ramenant au cas à 1 commande.

On remplace les dérivées $z_j^{(k)}$, $1 \leq j \leq m$, $0 \leq k \leq r$ du paramétrage par $z^{((j-1)(r+2)+k)}$. La diffiété image du nouveau paramétrage satisfait le système d'ordre 1 d'origine et d'autres équations d'ordre supérieur. Ce système à une commande admet une sortie linéarisante ζ.

On peut considérer l'image ξ_k de la fonction $\zeta^{(k)}$ dans les coordonnées x_i d'origine. Soit A_k l'anneau différentiel engendré par les ξ_s, $0 \leq s \leq k$. Il existe alors m entiers k_j ($k_1 = 0\,$!) tels que $\dim \mathrm{diff} A_{k_j} = \dim \mathrm{diff} A_{k_{j-1}} + 1$.
Les ξ_{k_j} sont des sorties linéarisantes.

On peut donc supposer que le paramétrage est plat

La dérivée $\partial_{z_i^{(r)}} w$ dépend seulement des x_i et de w.

— Elle ne peut pas dépendre de x_1' ou de ses dérivées, sinon, $\partial_{z_i^{(r)}}$ et $\partial_{z_i^{(r+k)}}$ ne commuteraient pas.
— Elle ne peut pas dépendre des dérivées de w, sinon elle ne serait pas *intégrable* : la suite $\partial^k_{z_i^{(r)}} w$, $k \in \mathbf{N}$ serait d'ordre non borné, ce qui contredit le fait que les z_i et leurs dérivées ne dépendent que d'un nombre fini de dérivées des x_i.

Zharinov (1996). Étude des ensembles de dérivations E_i avec E_0, l'espace des *symétries*, dérivations qui commutent avec d_t et E_{i+1} tel que $[E_{i+1}, \mathrm{d}_t] \subset E_i$.

Conclusion

On fait chuter r en prenant pour y_i n solutions indépendantes de

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x,w)\partial_{x_i} + (\partial_{z_i^{(r)}} w)(x,w)\partial_w\right) Y = 0.$$

Il existe des sorties linéarisantes $Z_1(x,x')$ et $Z_2(x, Z_1, \ldots, Z_1^{(n-2)})$.