Un cas pratique de la théorie de Picard-Vessiot des équations différentielles non commutatives

G.H.E. Duhamp & V. Hoang Ngoc Minh

La théorie de Picard-Vessiot (PV pour simplifier) des systèmes bi-linéaires (*i.e.* systèmes linéaires en les variables d'état $q_1, \ldots, q_N$ et linéaires les commandes $u_0, \ldots, u_m$) a été réalisée dans [5]. Cette théorie permet d'employer en automatique, avec succès, les groupes algébiques linéaires (*i.e.* l'algèbre différentielle des équations différentielles linéaires) dont certaines questions ont éré résolues à l'aide de la théorie des algèbres de Hopf [1] et certains aspects combiatoires et effectifs ont été initialisés dans [6].

Il est également connu depuis [4] qu'étudier la sortie, y, d'un système non linéraire revient à étudier la dualité entre, d'une part,

- la série de Chen, $C_{z_0 \rightsquigarrow z}$, des formes différentielles $\omega_0(z) = u_0(z)dz, \ldots, \omega_m(z) = (z)dz$ et au long d'un chemin $z_0 \rightsquigarrow z$ sur Ω (une variété simplement connexe de dimension 1),
- la série généN ératrice du système (non nécessairement rationnelle) en les variables non commutatives sur l'alphabet $X = \{x_0, \ldots, x_m\}$ (le monoide libre généré par X est dénoté par X^* et 1_{X^*} est son élément neutre).

De cette manière,

- en notant $(\mathcal{H}(\Omega), d/dz)$ l'anneau différentiel des fonctions analytiques sur Ω ($1_{\mathcal{H}(\Omega)}$ est son élément neutre),
- en équippant $\mathcal{H}(\Omega)\langle\langle X\rangle\rangle$ (l'anneau des séries formelles sur X et à coefficients dans $\mathcal{H}(\Omega)$) l'opérateur différentiel défini par

$$\forall S \in \mathbb{C}.1_{\mathcal{H}(\Omega)}\langle\langle X\rangle\rangle, \qquad \mathbf{d}S = \sum_{w \in X^*} \left(\frac{d}{dz}\langle S \mid w\rangle\right) w = 0, \tag{1}$$

la théorie PV des systèmes non linéaires est intimement reliée à celle de l'équation différentelle non commutative d'ordre 1 suivante [1]

$$\mathbf{d}S = \left(\sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i\right) S. \tag{2}$$

La série de Chen précédemment mentionnée est alors une solution de type groupe de (2), obtenue par l'itération de Picard (convergente pour la distance ultramétrique sur les séries formelles) initialisée en $\langle C_{z_0 \rightsquigarrow z} \mid 1_{X^*}\rangle = 1_{\mathcal{H}(\Omega)} 1_{X^*}$.

Dans cet exposé, nous illustrons cette théorie, en cours de construction, avec

$$X = \{x_0, x_1\}, \quad \Omega = \widetilde{\mathbb{C} \setminus \{0,1\}}, \quad u_0(z) = z^{-1} \text{ et } u_1(z) = (1-z)^{-1}. \tag{3}$$

1. L'équation (2) es considérée comme une équation différentielle universelle : en remplaçant les lettres $\{x_i\}_{i=0,1}$ par les matrices constantes $\{M_i\}_{i=0,m}$ (resp. champs de vector analytiques $\{A_i\}_{i=0,m}$), on a affaire avec une équation linéaire (resp. nonlinear).

La série de Chen correspondante est alors $C_{z_0\rightsquigarrow z}=\mathrm{L}(z)(\mathrm{L}(z_0))^{-1}$, où

$$\mathrm{L}(z)=\sum_{w\in X^*}\mathrm{Li}_w(z)w, \tag{4}$$

avec, pour $n\geq 0,(n_1,\ldots n_r)\in\mathbb{N}_+^r, r\in\mathbb{N}$ et $z\in\mathbb{C},|z|<1$,

$$\mathrm{Li}_{x_0^n}(z)=\frac{\log^n(z)}{n!}\quad\text{et}\quad\mathrm{Li}_{x_0^{n_1-1}x_1\ldots x_0^{n_r-1}x_1}(z)=\sum_{k_1>\ldots>k_r>0}\frac{z^{k_1}}{k_1^{n_1}\ldots k_1^{n_r}}. \tag{5}$$

La série L est aussi une solution de type groupe de (2) et $\mathrm{L}(z_0)\in\mathbb{C}.1_{\mathcal{H}(\Omega)}\langle\langle X\rangle\rangle$ (indépendant de z) est également de type groupe.

En particulier, nous calculons la sortie y, et son compotement asymptotique en $z=1$, des systèmes dont la série génératrice est combinaison linéaire des séries de la forme

(F_0) $E_1x_{i_1}\ldots E_jx_{i_j}E_{j+1}$, où $x_{i_k}\in X,E_k\in\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle$,
(F_1) $E_1x_{i_1}\ldots E_jx_{i_j}E_{j+1}$, où $x_{i_k}\in X,E_k\in\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle$,
(F_2) $E_1x_{i_1}\ldots E_jx_{i_j}E_{j+1}$, où $x_{i_k}\in X,E_k\in\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle\sqcup\!\sqcup\,\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle$.

Pour ce faire, nous considérons l'algèbre engendrée par des polylogarithms, $\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$, à coefficients dans l'anneau différentiel $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{z^a(1-z)^b\}_{a,b\in\mathbb{C}}$ (l'image de $\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle\sqcup\!\sqcup\,\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle$ par $\mathrm{Li}_\bullet$) et l'algèbre engendrée par des polyzêtas $\{\zeta(v)\}_{v\in x_0X^*x_1}$ (considérés comme des constantes d'intégration intervenant dans cette étude).

L'algèbre $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}\{\mathrm{Li}_w\}_{w\in X^*}$ (l'image de $\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_0\rangle\rangle\sqcup\!\sqcup\,\mathbb{C}^{\mathrm{rat}}\langle\langle x_1\rangle\rangle\sqcup\!\sqcup\,\mathbb{C}\langle X\rangle$ par $\mathrm{Li}_\bullet$) est stable par les opérateurs différentiels $\theta_0=zd/dz,\theta_1=(1-z)d/dz$ et par leur sections ι_0,ι_1. Cette algèbre bi-intégro-différentielle est également stable par le groupe des transformations engendré par $\{z\mapsto 1/z,z\mapsto 1-z\}$.

Ainsi, avec les données en (3), nous avons

— $(\mathcal{H}(\Omega)\langle\langle X\rangle\rangle,\mathbf{d})$ est un anneau différentiel et $\ker\mathbf{d}=\mathbb{C}.1_{\mathcal{H}(\Omega)}\langle\langle X\rangle\rangle$;
— l'extension PV de (2) est $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}\langle\langle X\rangle\rangle(\mathrm{L})$;
— le groupe de Galois différentiel de (2) est le groupe $\{e^C\}_{C\in\mathcal{L}ie_{\mathbb{C}}\langle\langle X\rangle\rangle}$.

D'autres exemples sont à poursuivre suivant [2, 3]

Références

[1] P. Cartier.– *A primer of Hopf algebras*, In : Cartier P., Moussa P., Julia B., Vanhove P. (eds) Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry II, (2007).

[2] M. Deneufchâtel, G.H.E. Duchamp, Hoang Ngoc Minh, A.I. Solomon.– *Independence of hyperlogarithms over function fields via algebraic combinatorics*, in Lecture Notes in Computer Science (2011), Volume 6742/2011, 127-139.

[3] G.H.E. Duchamp, Hoang Ngoc Minh, Q.H. Ngo, K.A. Penson, P. Simonnet– *Mathematical renormalization in quantum electrodynamics via noncommutative generating series*, in "Applications of Computer Algebra", Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, pp. 59-100 (2017).

[4] M. Fliess.– *Réalisation locale des systèmes non linéaires, algèbres de Lie filtrées transitives et séries génératrices*, Inv. Math., t 71, 1983, pp. 521-537.

[5] M. Fliess, C. Reutenauer.– *Théorie de Picard-Vessiot des systèmes réguliers (ou bilinéires)*, dans "Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse de systèmes et le traitement du signal, CNRS-RCP 567 (1980).

[6] C. Reutenauer.– *Free Lie Algebras*, London Math. Soc. Monographs (1993)